Exercice 5.3 : cisaillement

1. $x = x_o + y_o \, tg\theta$ et $y = y_o$ étant donné que l'écartement entre les deux plaques reste constant.
Champ de déplacement : $\mathbf{u} = (y_o \, tg\theta, 0)$.

2. Tenseur gradient de la déformation, [**L**] = [**I**] + **Grad u** :
$Grad\ \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & \tan\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $[L] = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Tenseur des déformations de Cauchy-Green [**B**] = $[\mathbf{L}]^T$ [**L**] :
$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ \tan\theta & 1+(\tan\theta)^2 \end{pmatrix}$$

4. Tenseur des déformations de Green-Lagrange [ε] = ½{[**B**] – [**I**]} :
$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \tan\theta \\ \tan\theta & (\tan\theta)^2 \end{pmatrix}$$

5. Tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites déformations :
$$[\varepsilon_{linéarisé}] = \frac{1}{2}(Grad\ \underline{u} + Grad\ \underline{u}^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \tan\theta \\ \tan\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange devient égal au tenseur des petites déformations pour θ petit.

6- tenseur des rotations.
$$d = \frac{1}{2}(Grad\ \underline{u} - Grad\ \underline{u}^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \tan\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tan\theta & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \tan\theta \\ -\tan\theta & 0 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$
ce qui correspond à une rotation d'angle -θ/2 petit.

Exercice 5.4

Le champ de déplacement vaut : $\vec{u} = MM'\begin{pmatrix} -\frac{xy}{R} \\ \frac{x^2}{2R} \end{pmatrix}$ et donc $L = Id + grad\vec{u} = \begin{pmatrix} 1-\frac{y}{R} & -\frac{x}{R} \\ \frac{x}{R} & 1 \end{pmatrix}$

le tenseur de Cauchy-Green **B** vaut : $B = \left(L^t\right)L = \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(1-\frac{y}{R}\right)^2 & \frac{xy}{R^2} \\ \frac{xy}{R^2} & 1+\left(\frac{x}{R}\right)^2 \end{pmatrix}$

et le tenseur de Green-Lagrange : $\varepsilon = \frac{1}{2}(B\text{-}I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 - 2\frac{y}{R} & \frac{xy}{R^2} \\ \frac{xy}{R^2} & \left(\frac{x}{R}\right)^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ lorsque x et y sont petits devant R.

Le tenseur linéarisé des déformations vaut : $\varepsilon_{lin} = \frac{1}{2}\left(gradu + \left(gradu\right)^t\right) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est bien identique au tenseur de Green-Lagrange dans l'approximation des petites déformations.

Les conditions sont : $\left|\frac{x}{R}\right| < 0.1$ et $\left|\frac{y}{R}\right| < 0.1$

La ligne neutre est donnée par y = 0 avec compression pour y > 0 et traction pour y < 0.

Exo 5.5

On considère la déformation plane d'une poutre très longue dans la dimension z, de section rectangulaire dans le plan xy. Elle est comprimée entre deux plans parallèles. Par symétrie du problème, on ne considère qu'un quart de cette plaque dans une coupe transverse avec le système d'axes indiqué sur la figure. On suppose qu'un point de la poutre initialement en (x,y) se déplace en (x',y') donné par :

$$x' = x\left[1+\varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right)\right] \text{ et } y' = \left(1+\varepsilon_h\right) y \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{\text{R'-R}}{\text{R}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_h = \frac{\text{h'-h}}{\text{h}} \leq 0$$

où 2h et 2R sont les hauteur et largeur de la poutre avant déformation et 2h' et 2R' sont les dimensions après déformation. On remarquera que les points de la barre en contact avec les plans sont supposés fixes (i.e. pas de glissement) et que la barre adopte après déformation un profil en tonneau.

1. Calculez le tenseur gradient de la déformation L**.**

$$\text{champ de déplacement } u = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{xy}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) \\ \varepsilon_h y \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{\text{R'-R}}{\text{R}} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{\text{h'-h}}{\text{h}} \leq 0$$

$$\text{L} = \text{I} + \text{gradu} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & \frac{\varepsilon_R x}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) - \varepsilon_R \frac{xy}{h^2} \\ 0 & 1+\varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{\text{R'-R}}{\text{R}} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{\text{h'-h}}{\text{h}} \leq 0$$

2. Calculez le tenseur linéarisé des déformations, ε.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\text{ gradu+gradu}^t\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & x\frac{\varepsilon_R}{h} - \varepsilon_R \frac{xy}{h^2} \\ x\frac{\varepsilon_R}{h} - \varepsilon_R \frac{xy}{h^2} & \varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_R = \frac{\text{R'-R}}{\text{R}} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h = \frac{\text{h'-h}}{\text{h}} \leq 0$$

3. Que vaut le tenseur de Cauchy-Green **B** dans le cas des petites déformations ? On exprimera B en fonction de I et du tenseur linéarisé des déformations, ε.

   $$\text{B} = \left(\text{L}^t\right)\text{L} = \left(\text{I}^t + \text{gradu}^t\right)\left(\text{I+gradu}\right) = \text{I+gradu+gradu}^t = \text{I}+2\varepsilon$$

4. Calculez la norme après déformation proche du point O de $\Delta\vec{r}_0 = dy\vec{e}_y$

$$\Delta\vec{r}_0 = \text{dy}\vec{e}_y \text{ et } \Delta\vec{r}^2 = \Delta\vec{r}_0^{\,t}\text{B}\Delta\vec{r}_0 = \Delta\vec{r}_0^{\,t}(\text{I}+2\varepsilon)\Delta\vec{r}_0 = \Delta\vec{r}_0^{\,2} + 2\Delta\vec{r}_0^{\,t}\varepsilon\Delta\vec{r}_0$$

$$\Delta\vec{r}^2 = \text{dy}^2 + 2\left(0 \quad \text{dy}\right)\begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & x\frac{\varepsilon_R}{h} - \varepsilon_R \frac{xy}{h^2} \\ x\frac{\varepsilon_R}{h} - \varepsilon_R \frac{xy}{h^2} & \varepsilon_h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \text{dy} \end{pmatrix} = \text{dy}^2 + 2\left(0 \quad \text{dy}\right)\begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon_R}{h} - \varepsilon_R \frac{y}{h^2}\right)\text{xdy} \\ \varepsilon_h \text{dy} \end{pmatrix} = \text{dy}^2 + 2\varepsilon_h \text{dy}^2$$

$$\Delta\vec{r}^2 = \text{dy}^2 + 2\varepsilon_h \text{dy}^2 = (1+2\varepsilon_h)\text{dy}^2 = (1+\varepsilon_h)^2\text{dy}^2 \text{ car } \varepsilon_h \text{ reste petit.}$$

NB: ε proche de 0 vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_h \end{pmatrix}$ et correspond à de la contraction selon y car $\varepsilon_h \leq 0$.

5. Où se trouvent les zones :

- de cisaillement maximum ?

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & x\frac{\varepsilon_R}{h}-\varepsilon_R\frac{xy}{h^2} \\ x\frac{\varepsilon_R}{h}-\varepsilon_R\frac{xy}{h^2} & \varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_R=\frac{R'-R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h=\frac{h'-h}{h} \leq 0$$

$x\frac{\varepsilon_R}{h}-\varepsilon_R\frac{xy}{h^2}$ avec y variant de 0 à h et x de 0 à R est max en x = R et y = 0 et vaut $R\frac{\varepsilon_R}{h}$

- de déformation ε_{xx} maximum ?

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right) & x\frac{\varepsilon_R}{h}-\varepsilon_R\frac{xy}{h^2} \\ x\frac{\varepsilon_R}{h}-\varepsilon_R\frac{xy}{h^2} & \varepsilon_h \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_R=\frac{R'-R}{R} \geq 0 \text{ et } \varepsilon_h=\frac{h'-h}{h} \leq 0$$

$\varepsilon_R \frac{y}{h}\left(2-\frac{y}{h}\right)$ avec y variant de 0 à h est max en y = h et vaut ε_R